Gebrochen-rationale Funktionen • Asymptoten
Übung

1. Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge folgender Funktionen. Ermitteln Sie jeweils alle Asymptoten mit Art, Gleichung und Begründung.

   a) $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$

   b) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$

   c) $f(x) = \frac{x^2-2}{x-1}$

   d) $f(x) = \frac{x-1}{2x^2-x-1}$

   e) $f(x) = \frac{2}{(x-3)(x-4)}$

   f) $f(x) = \frac{x^2+3x+4}{2x-4}$

   g) $f(x) = \frac{2x^2-4x+3}{2x^2-2x-4}$

   h) $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x^3+x+3}{\frac{1}{2}x^2+1}$

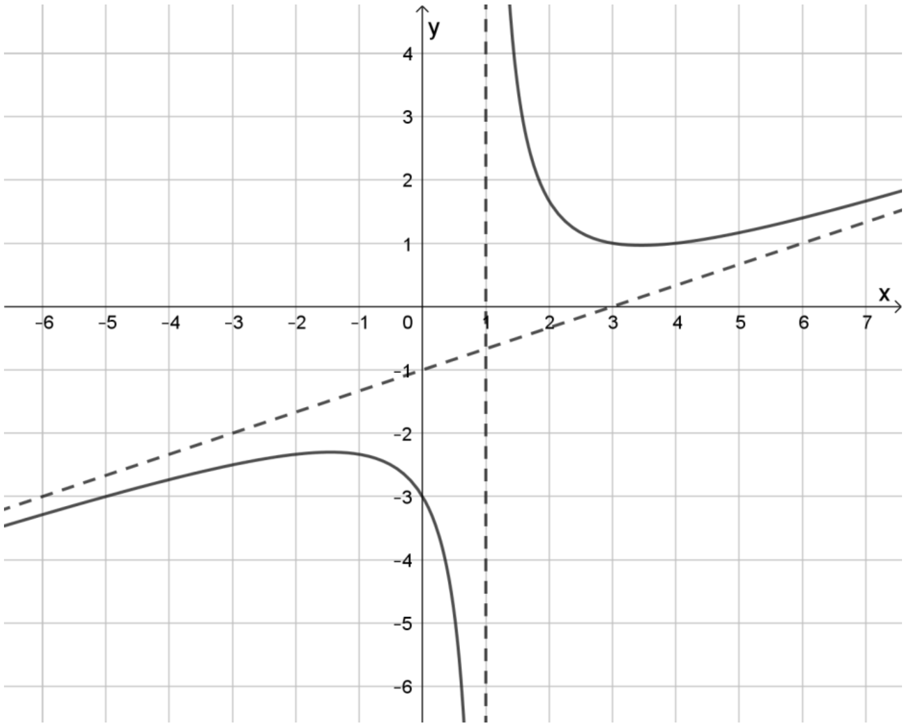
2. Geben Sie je einen möglichst einfachen Funktionsterm für eine gebrochen-rationale Funktion an, die genau die angegebenen Geraden als Asymptoten haben.

   a) $y = 0$ und $x = 2$

   b) $y = -2$; $x = 0$ und $x = 3$

   c) $y = x - 3$ und $x = 1$

3. Das untere Diagramm zeigt den Graphen der gebrochen-rationalen Funktion g. Ermitteln Sie einen möglichst einfachen Funktionsterm für g. [Hinweis: Sämtliche vorhandenen Asymptoten sind gestrichelt eingezeichnet.]



Gebrochen-rationale Funktionen • Asymptoten
Lösung

1.

a) $D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$; senkrechte Asymptote bei der Polstelle $x = 2$, waagrechte bei $y = 1$, da $z = n$.

b) $D_{max} = \mathbb{R}$; keine senkrechten Asymptoten, waagrechte bei $y = 1$, da $z = n$.

c) $D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; senkrechte Asymptote bei der Polstelle $x = 1$, die schräge Asymptote $y = x + 1$ folgt aus der Polynomdivision, da $f(x) = x + 1 - \frac{1}{x-1}$.

d) $D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{-0{,}5; 1\}$; $f_3(x) = \frac{x-1}{2x^2-x-1} = \frac{x-1}{2(x+\frac{1}{2})(x-1)}$. Es liegt eine hebbare Definitionslücke (d.h. keine Polstelle) vor bei $x = 1$. Senkrechte Asymptote bei der Polstelle $x = -\frac{1}{2}$. Außerdem waagrechte Asymptote wegen $z < n$ bei $y = 0$.

e) Wegen $z < n$ waagrechte Asymptote $y = 0$ sowie zwei senkrechte Asymptoten an den Polstellen bei $x = 3$ und $x = 4$.

f) f besitzt eine Polstelle 1. Ordnung bei $x = 2$ und damit die senkrechte Asymptote $x = 2$. Polynomdivision liefert $f_5(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} + \frac{14}{2x-4}$, also schräge Asymptote $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

g) Zwei Polstellen und damit senkrechte Asymptoten bei $x = -1$ und $x = 2$. Vergleich der Leitkoeffizienten ergibt die waagrechte Asymptote $y = \frac{2}{2} = 1$.

h) $D_{max} = \mathbb{R}$, also keine Polstellen bzw. senkrechte Asymptoten. Aus der Polynomdivision erhält man $y = x$ für die schräge Asymptote.

2.

a) z.B. $f(x) = \frac{1}{x-2}$

b) z.B. $f(x) = \frac{-2(x-1)^2}{x(x-3)}$, hier ist darauf zu achten, dass Zähler- und Nennergrad gleich sind und der Leitkoeffizient im Zähler -2 beträgt. Im Zähler kann ansonsten ein beliebiger quadratischer Ausdruck stehen, solange dieser nicht die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$ besitzt.

c) z.B. $f(x) = x - 3 + \frac{1}{x-1} = \frac{x^2-4x+4}{x-1}$

3. z.B. $g(x) = \frac{1}{3}x - 1 + \frac{c}{x-1}$
$g(0) = -1 - c = -3$;
$c = 2$ und damit $g(x) = \frac{1}{3}x - 1 + \frac{2}{x-1}$
Alternativ: $f(x) = \frac{\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 3}{x-1}$